**Relaciones**

**Producto cartesiano**

El producto cartesiano de dos a más conjuntos es un nuevo conjunto que se construye a partir de algunos dados.

Primeramente, veamos a que se le llama par ordenado. Recordemos que {a; b} = {b; a}, ya que no importa el orden en que listamos los elementos. Sin embargo, muchas veces será de gran utilidad considerar listas de elementos donde sí importe el orden. Un **par ordenado** es un conjunto de 2 elementos, denotado:

(a; b)

donde importa el orden, es decir (a; b) ≠ (b; a) en general (siempre que si a ≠ b). Decimos que a es el primer elemento del par y que b es el segundo elemento del par. Una manera formal de definir el par ordenado es:

(a; b) = {{a} ; {a ; b}}

Con esta definición es claro que (a; b) ≠ (b; a), si a ≠ b.

(a , b , c) = { {a} , {a , b} , {a , b , c} }

( 3 , 5) = {{3} , {3 , 5}}

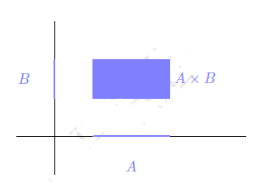
***Definición****. Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de A por B, denotado por A x B, es el conjunto de pares ordenados cuyo primer elemento pertenece a A y el segundo pertenece a B. En símbolos A x B = {(a; b) / a ∈ A ∧ b ∈ B}*

Una diferencia sustancial con las otras operaciones estudiadas, es que los elementos del producto cartesiano son de una naturaleza distinta a la de los elementos de los conjuntos dados. Todas las demás operaciones producen conjuntos en el mismo universo del que son parte los conjuntos dados. Por ejemplo, si se unen dos conjuntos con elementos unidimensionales, se obtiene otro conjunto con elementos también unidimensionales, pero si se realiza el producto cartesiano de dos conjuntos unidimensionales, se obtiene otro conjunto con elementos bidimensionales.

Por ejemplo, si A = {a1; a2} y B = {b1; b2; b3} entonces

A x B = {(a1; b1) , (a1; b2), (a1; b3), (a2; b1), (a2; b2) , (a2; b3)}

Resulta muy conveniente representar gráficamente al producto cartesiano de dos conjuntos, A x B, en un sistema cartesiano. En el eje horizontal se representan los elementos del primer conjunto del producto y, en el eje vertical, los del segundo conjunto. Genéricamente, un producto cartesiano se ve como un rectángulo en el plano.



A = {1; 2; 3; 4 , 5} y B ={1; 2; 3}

B

 A

**Grafo**

***Definición****: Dados los conjuntos A, B y A x B. Se llama grafo G a una parte de A x B.*

Es decir, es un conjunto de pares ordenados (x, y) de A x B.

Ejemplo:

Si A = {a, b, c}; B = {1, 2}; G = {(a, 1); (b, 1); (c, 1); (c, 2)} es un grafo, dado que G ⊆ A x B

A x B = G = {(a , 1) , (a , 2) , (b , 1) , (b , 2 ) , (c , 1) , (c , 2)}

G3= {(a , 2) , (c , 2)}

De la definición, es claro que el producto cartesiano no es ni conmutativo ni asociativo.

Es decir, en general A x B ≠ B x A ( (a; b) ≠ (b; a) si a ≠ b)

**Proyección de un grafo.**

***Definición****: Se llama* ***primer proyector*** *del grafo G ⊆ A x B, al conjunto de los elementos x de A tales que el par ordenado (x, y) ∈ G.*

Pr1G = {x ∈ A / (x, y) ∈ G}

De la misma manera *se define la* ***segunda proyección*** *del grafo G como el conjunto de los elementos y ∈ B, tales que punto (x, y) ∈ G ⊆ A x B.*

Pr2 G = { y ∈ B/ (x, y) ∈ G}



**Producto cartesiano de n conjuntos**

De manera análoga al caso de dos conjuntos se puede definir el producto cartesiano de más de dos conjuntos. En este caso sus elementos en lugar de ser pares ordenados son n-uplas ordenadas. Si A1; A2; . . . ;An son n conjuntos dados, el producto cartesiano de ellos es:

A1 x A2 x . . . x An = {(a1; a2; . . . ; an) / ai ∈ Ai}

Donde i ∈ N, i: 1 , 2 , 3 , …n i pertenece al conjunto de índices

**Relación. Relación Binaria**

Si A y B son dos conjuntos, y P(x , y) es una propiedad relativa a los elementos x ∈ A e y ∈ B, en ese orden. Esto sugiere la consideración del producto cartesiano A x B y a determinación de los pares ordenados (a , b) para los cuales P(a , b) es una proposición verdadera. De este modo queda definido un subconjunto R ⊆ A x B, llamado relación.

(x , y) ∈ R ⇔ P (x , y) es Verdadera

***Definición****: Relación entre A y B es todo subconjunto del producto cartesiano A x B.*

*R es una relación entre A y B ⇔ R ⊆ A x B*

Ejemplos.

1) Sea A el conjunto formado por personas a, b, c y d, y el conjunto B cuyos elementos son las posibles notas obtenidas en un examen: 1, 2 , 3 , 4 y 5, correspondientes a insuficiente, aprobado, bueno, distinguido y sobresaliente.

A = { a, b, c , d} B = { 1, 2 , 3 , 4 , 5 } P(x , y): x obtuvo la nota y

Si la situación queda especificada mediante el siguiente diagrama:



R = {(a , 2) , (a, 4) , (b , 4), (d , 5)}

2) Sea A = R, el conjunto de números reales y sea R la relación “es menor que”. Es decir, (a; b) ∈ R si a < b.

A = {1 , 2 ,3 ,4 , 5} B = { 2 , 4 , 6 , 7 } P(x , y) : x < y

A x B = { (1 , 2) , (1 , 4 ) , (1 , 6) , (1 , 7) , (2 , 2) , (3 , 2), …. (5 , 7)}

P(1 , 2): 1 < 2 verdadero entonces (1 , 2) ∈ R

P(3 , 2): 3 < 2 falso entonces (3 , 2) ∉ R

P(2 , 2): 2 < 2 falso entonces (1 , 2) ∉ R

R = {(1 , 2) , (1 , 4 ) , (1 , 6) , (1 , 7) , …. (5 , 7)}

En este ejemplo todo par de números distintos, está relacionado en un sentido o en otro. Sin embargo, ningún número está relacionado con sí mismo.

3) Sea A = R, el conjunto de números reales y sea R la relación “es menor o igual que”.

Es decir (a; b) R si a b.

**Dominio e Imagen de una relación**

***Dominio de una relación*** es el conjunto formado por todas las primeras componentes del conjunto relación***. DR = { x / (x , y) ∈ R}***

***Imagen de una relación*** es el conjunto formado por todas las segundas componentes del conjunto relación. ***IR = { y / (x , y) ∈ R}***

En el ejemplo 1, siendo: R = {(a , 2) , (a, 4) , (b , 4), (d , 5)}

DR = { a , b , d} e IR = { 2 , 4 , 5}

**Composición de relaciones**

A partir de las relaciones R ⊆ A x B y S ⊆ B x C, es posible definir una relación entre A y C, llamada composición entre R y S, mediante:

*S ο R = { (x , z)/ ∃ y ∈ B ∧ (x , y) ∈ R → (y , z ) ∈ S}*

Ejemplo:

A = {-1 ,0 , 1} B = {1 , 3} C = {3/2 , 5/2 , 0}

R ⊆ A x B está definida por: la imagen de x es su cuadrado. R(x , y): y = x2

R = {(-1 , 1) , (1 , 1)}

S ⊆ B x C, caracterizada por: el correspondiente de y es la mitad de x aumentada en 1.

S(x , y): y = +1 S = { (1 , 3/2) , (3 , 5/2)}

S(y , z): z = +1 R S

A x C 

x y z

R ={ (-1 , 1) . (1 , 1)}

S = {(1 . 3/2) , (3 , 5/2)

S ο R = {(-1 , 3/2) , (1 , 3/2)} (x , z) z = en términos de x

La relación compuesta S ο R ⊆ A x C está determinada así: (x , z ) ∈ S ο R ⇔

**Relación Inversa**

Sea R ⊆ A x B, se la llama relación inversa de R, denotada , al conjunto de pares tales que:

A x B = {(a , 1) , (a , 2) , (b , 1) , (b , 2 ) , (c , 1) , (c , 2)}

R = { (a , 1) , (b , 2) , ( c ,1)}

={ (1 , a) , ( 2 , b) , ( 1 , c)} ⊆ B x A

**Relaciones definidas en un conjunto**

Sea R una relación entre A y B, donde B = A. En este caso, la relación está definida en A y se identifica con un subconjunto de = A x A.

***Definición****: R es una relación definida en A, si y sólo si R ⊆*

Como todo subconjunto de es un elemento de las partes de , se puede decir que R es una relación definida en A, si y sólo sí, R ∈ P().

Si A tiene n elementos, entonces tiene elementos, y el conjunto de partes de , tiene subconjuntos de , o lo que es lo mismo, relaciones en A.

Por ejemplo, si A = { 1 , 2 ,3}

= { (1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (2 , 1) , (2 , 2) , (2 , 3) , (3 , 1) , (3 , 2) , (3 , 3)}

Una posible relación en A es R = { (1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2), (3 , 3)}

Cuyo correspondiente diagrama de Venn es:



¿2|6? Si, porque al dividir 6 por 2, el cociente da 3 ∈ Z y el resto es cero. 6 = 2 x 3 + 0

|  |  |
| --- | --- |
| 6 | 2 |
| 6 | 3 |
| 0 |  |

¿6 | 2? “¿6 divide a 2?” no porque el cociente es cero.

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 6 |
| 2 | 0 |
|  |  |

2 = 6 x 0 + 2

71 / 3 cociente = 23 y resto = 2 71 = 23 x 3 + 2

2 | 6 , 6 | 12 entonces 2 | 12

**Posibles propiedades de las relaciones definidas en un conjunto**

Sea R una relación definida en A, es decir, R ⊆ . Dicha relación puede clasificarse de acuerdo con las siguientes propiedades:

* **Si se analiza la relación de un elemento consigo mismo**:

***Reflexividad****: Sea* R ⊆  *, R es reflexiva ⇔*

La reflexividad de R se caracteriza porque todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

***No Reflexividad****: R ⊆ R es no reflexiva ⇔*

La no reflexividad de R queda especificada por la existencia de al menos un elemento de A que no esté relacionado consigo mismo.

(Por ley lógica: y )

***A-reflexividad****: : R ⊆ R es a-reflexiva ⇔*

Es decir, ningún elemento de A está relacionado consigo mismo.

Nota: Cabe aclarar que toda relación a-reflexiva es no reflexiva.

* **Si se analiza la relación entre dos elementos**:

***Simetría****: Sea* R ⊆  *, R es simétrica ⇔*

Si un par pertenece a la relación, el par que resulta de permutar sus componentes también pertenece a dicha relación.

***No Simetría****: R ⊆ R es no simétrica ⇔*

La no simetría no impide que dos pares de componentes permutadas permanezcan en la relación, pero exige que haya al menos un par en la relación para el cual el par que resulta de permutar sus componentes, no pertenezca a ella.

***A- Simetría****: : R ⊆ R es asimétrica ⇔*

Debe ocurrir, para todos los casos que, si un par pertenece a la relación, el par ordenado que se deduce de permutar sus componentes, no pertenece a dicha relación.

***Antisimetría:***

*R ⊆ R es antisimétrica ⇔*

En este caso, si dos pares de componentes permutadas pertenecen a la relación, entonces dichas componentes se identifican.

* **Si se analiza la relación entre tres elementos**:

***Transitividad****:*

*Sea* R ⊆  *, R es transitiva ⇔*

Si un elemento está relacionado con otro (no necesariamente distinto) y éste está relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

***No Transitividad****:*

*R ⊆ R es no transitiva ⇔*

Existen pares que evidencian que un elemento está relacionado con otro, éste se relaciona con un tercer elemento, pero el primero no se relaciona con el tercero

***A-Transitividad****:*

*R ⊆ R es a-transitiva ⇔*

Si un elemento está relacionado con otro (no necesariamente distinto) y éste está relacionado con un tercero, en todos los casos, el primero no está relacionado con el tercero.

Ejemplo:

1) A = { 1 , 2 ,3} y R = { (1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1) , (2 , 2), (3 , 3)}

Es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. 

Reflexiva: *R es reflexiva ⇔*

1 ∈ A ⇒ ( 1 , 1) ∈ R 2 ∈ A ⇒ ( 2 , 2) ∈ R 3 ∈ A ⇒ ( 3 , 3) ∈ R

Simetría: *R es simétrica ⇔*

(2 , 1) ∈ R ⇒ (1, 2) ∈ R

V V V

(1 , 3) ∈ R ⇒ (3 , 1) ∈ R

F V F

(2 , 2) ∈ R ⇒ (2, 2) ∈ R

V V V

(2 , 3) ∈ R ⇒ (3 , 2) ∈ R

F V F

Transitiva: *R es transitiva ⇔*

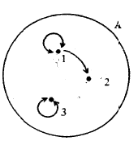
[(1 , 2) ∈ R ∧ ( 2 , 3) ∈ R ] ⇒ (1 , 3) ∈ R

V F F V F

[(1 , 2) ∈ R ∧ ( 2 , 2) ∈ R ] ⇒ (1 , 2) ∈ R 1 2 2

V V V V V

2) A = { 1 , 2 ,3} y R = { (1 , 1) , (1 , 2) , (3 , 3)}

Es no reflexiva, no simétrica y transitiva.

Reflexiva: *R es reflexiva ⇔*

1 ∈ A ⇒ ( 1 , 1) ∈ R 2 ∈ A ⇒ ( 2 , 2) ∉ R 3 ∈ A ⇒ ( 3 , 3) ∈ R

No es reflexiva, porque 2 ∈ A ⇒ ( 2 , 2) ∉ R

Simetría: *R es simétrica ⇔*

(1 , 2 ) ∈ R ⇒ (2 ,1) ∈ R

V F F la relación no es simétrica

Es no- simétrica: ∃ x ∈A, ∃ y ∈A / (x , y) ∈ R ∧ (y . x) ∉ R

(1 , 2 ) ∈ R ∧ (2 ,1) ∉ R

No es a-simétrica porque : ( 1, 1 ) ∈ R ⇒ (1 ,1) ∈ R ( 2, 2 ) ∈ R ⇒ (2 ,2) ∈ R

V V V F V F

Transitiva: *R es transitiva ⇔*

[(1, 2) ∈ R ∧ (2 ,3) ∈ R ] ⇒ (1 ,3) ∈ R

V F F V F

[(2, 2) ∈ R ∧ (2 ,2) ∈ R ] ⇒ (2 ,2) ∈ R

F F F V F

[(2, 1) ∈ R ∧ (1 ,3) ∈ R ] ⇒ (1 ,3) ∈ R

F F F V F

[(1, 1) ∈ R ∧ (1 ,2) ∈ R ] ⇒ (1 ,2) ∈ R

V V V V V

[(1, 2) ∈ R ∧ (2 ,1) ∈ R ] ⇒ (1 ,1) ∈ R

V F F V V

[(3, 1) ∈ R ∧ (1 ,2) ∈ R ] ⇒ (3 , 2) ∈ R

F F V V F